Etude d'une chute verticale avec frottement

But du TP :

- Enregistrer le mouvement de chute dans un liquide
- Tracer la courbe v = f(t)
- Déterminer la vitesse limite, reconnaître le régime initial, le régime permanent et déterminer le temps caractéristique de passage de l'un à l'autre
- Vérifier les résultats expérimentaux par une méthode de calcul analytique

1. Analyse d'un mouvement de chute avec frottement :

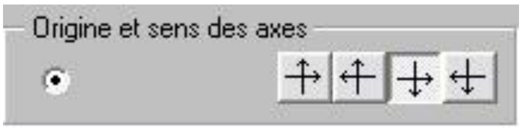
On étudie le mouvement de chute verticale d'un bouchon dans de l'eau.
Données expérimentales :

- masse du bouchon : m = 24,5 g
- masse de l'eau déplacée : m_e = 18,8 g
- durée entre deux images : Δt = 0,1 s

a) Traitement du fichier vidéo

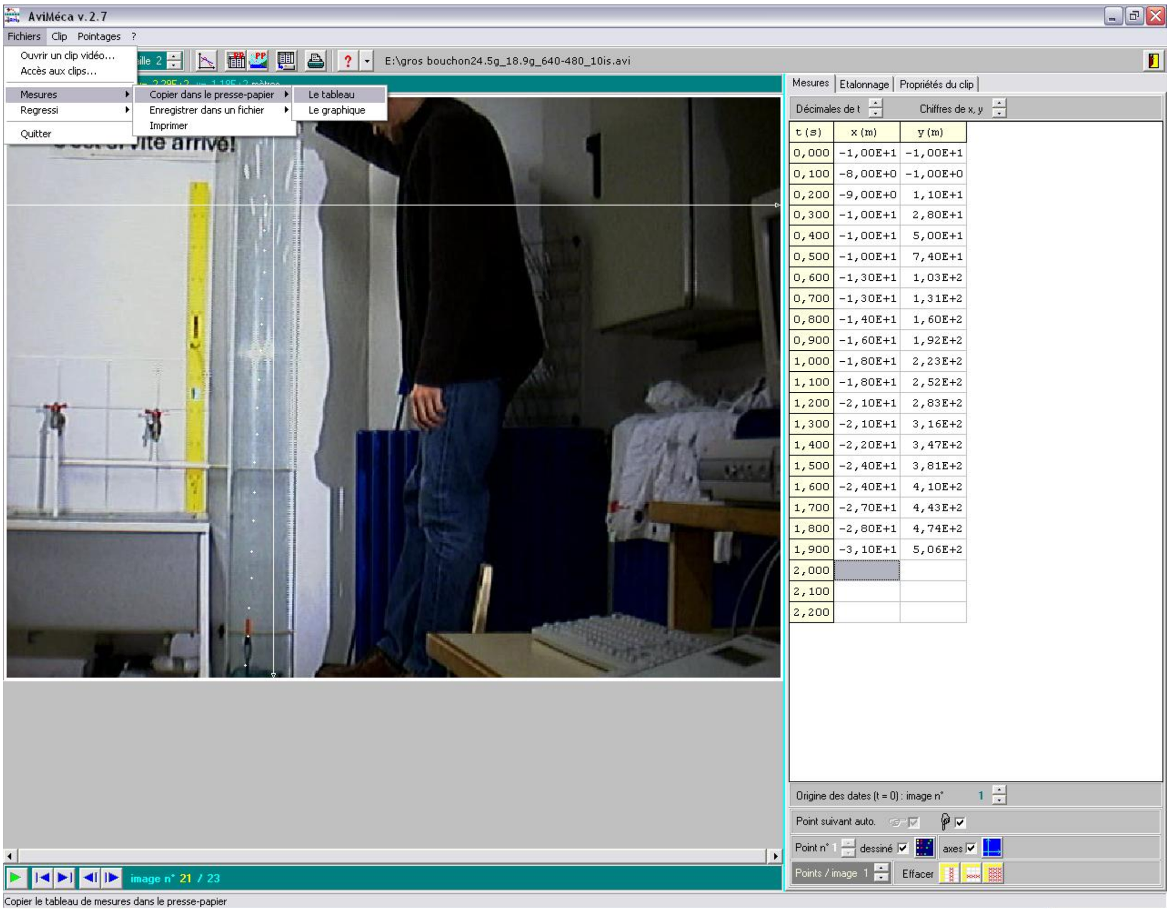
Ouvrir le fichier vidéo grâce au logiciel Aviméca. Il faut construire un tableau comportant les dates *t* et les coordonnées horizontales *x* et verticale *y* du bouchon à ces différentes dates.

Cliquer sur l'onglet *Mesures* et faire défiler les images une par une (en cliquant sur cette flèche )afin de repérer l'image correspondant au lâché du bouchon ; choisir cette images comme origine des dates, pour se faire, cliquer sur étalonnage, puis sur origine et sens avec la configuration suivante :



Puis, placer la position initiale du bouchon.
Revenir sur l'onglet mesure pour faire les pointages.

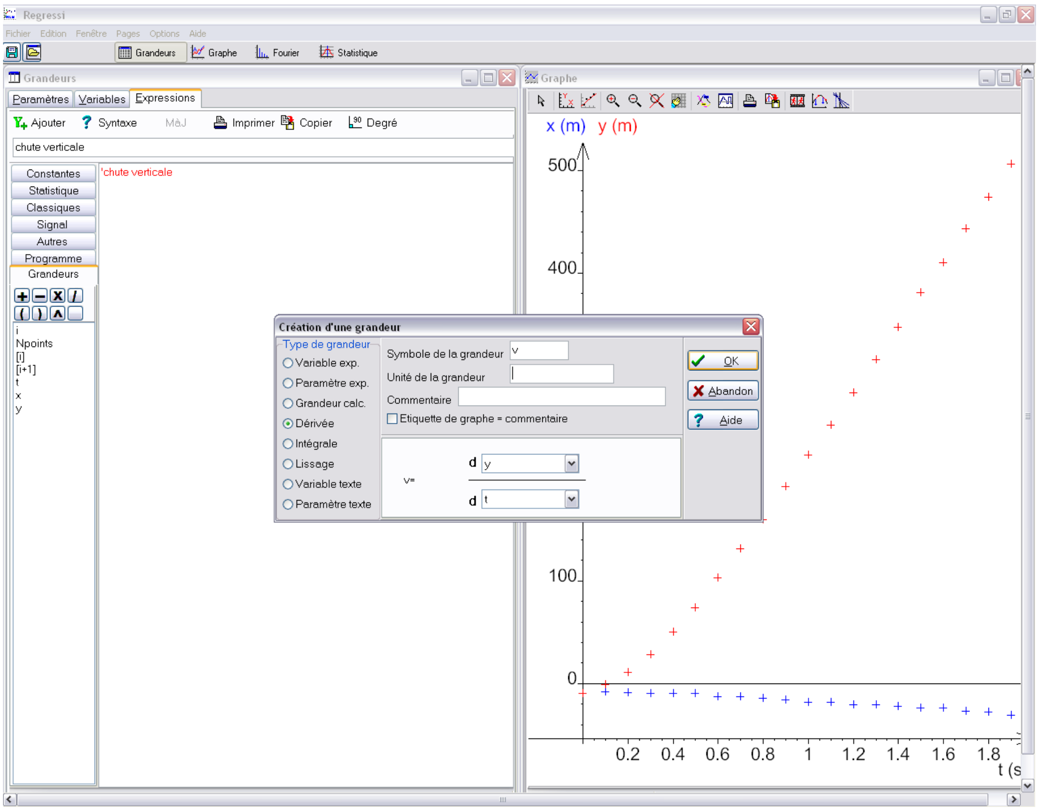
Enregistrer les données et choisir un titre ainsi que tabulation.



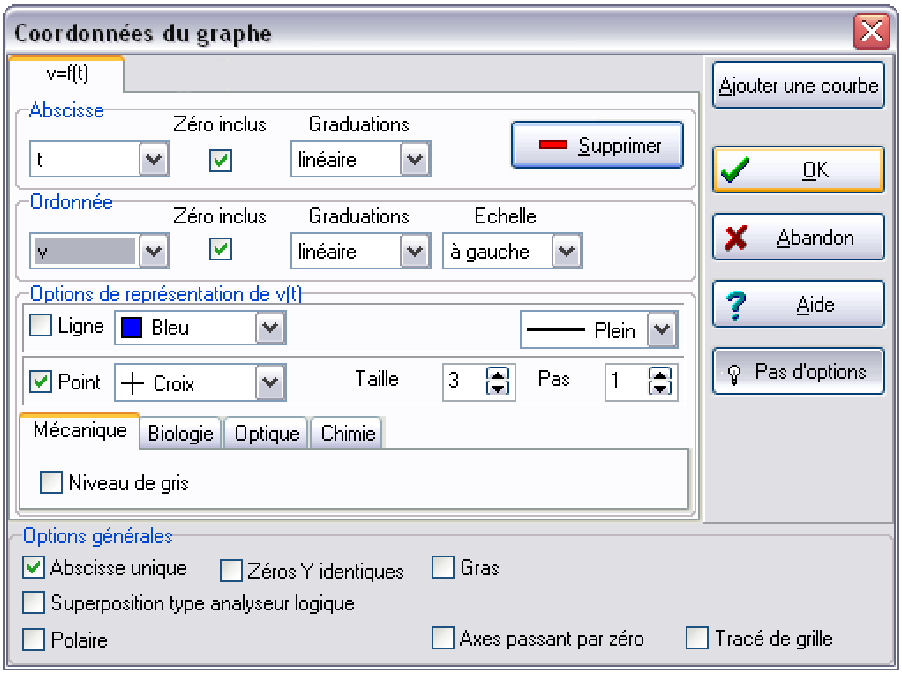
b) Exploitation de la courbe

Ouvrir Regressi, cliquer sur *fichier/Nouveau/Presse papier*

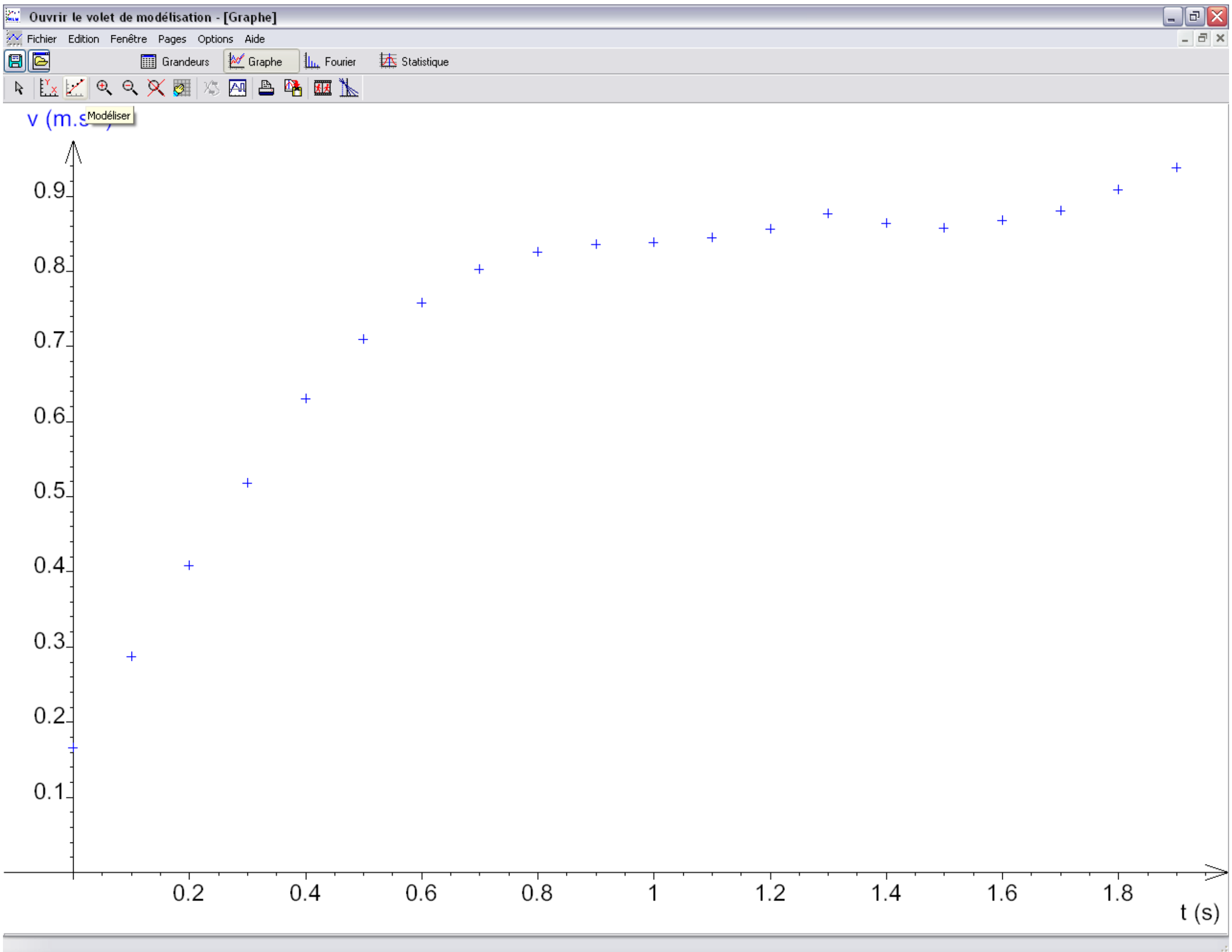
Dans Regressi, créer une grandeur afin de pouvoir faire calculer la vitesse du bouchon $\left(v = \frac{dy}{dt}\right)$.



Dans graphe, cliquer sur coordonnées pour afficher la courbe v = f(t).



On obtient la courbe suivante :



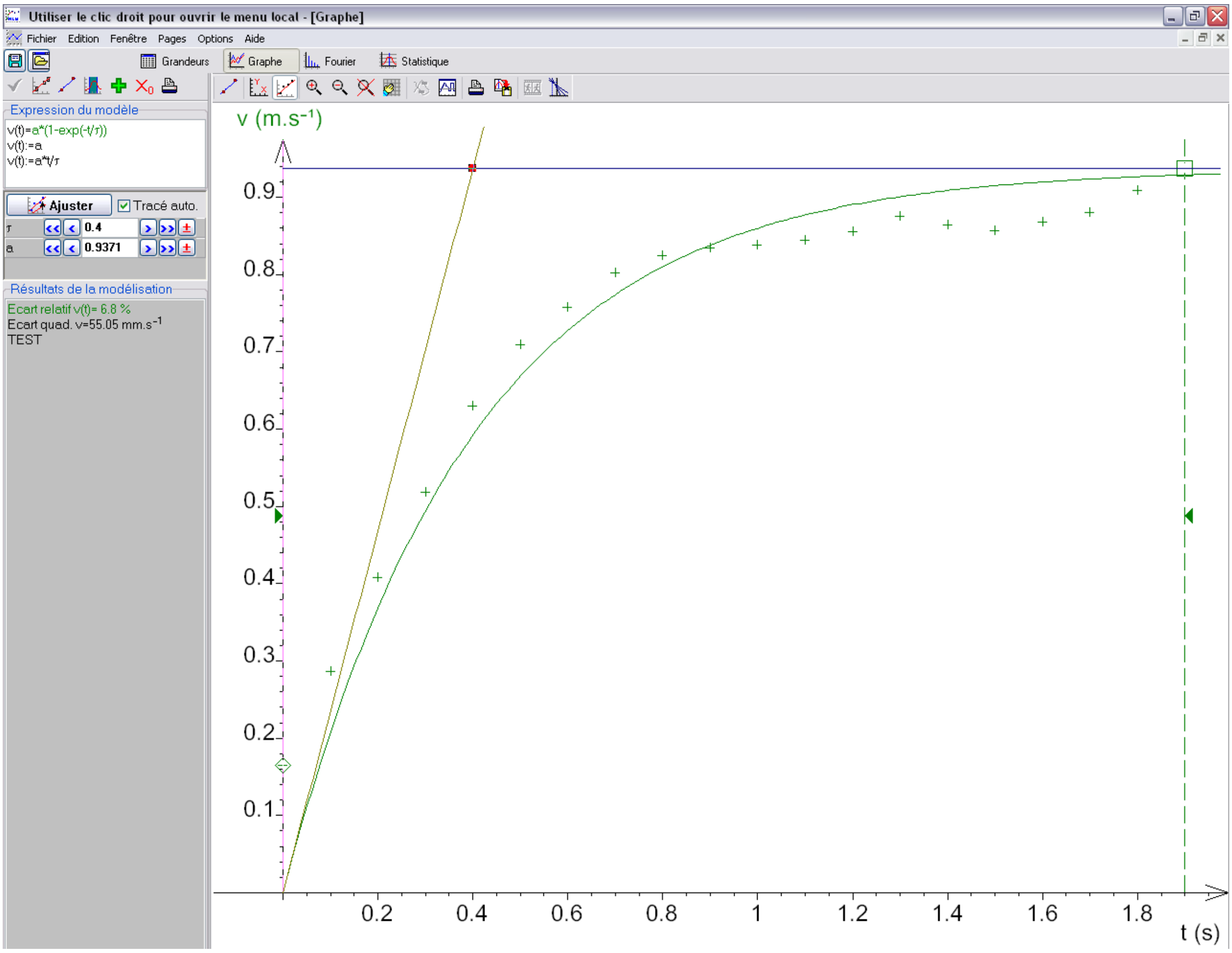
Quels sont les différentes parties de la courbe ?

Il y a deux phases :

- Une première dans laquelle v augmente : c'est le régime transitoire.
- Une deuxième dans laquelle $v = v_{lim}$: c'est le régime permanent

Quelle est la vitesse initiale v_0 ?Quelle est la vitesse limite v_1 ? Puis déterminer le temps caractéristique de ce mouvement, qui est l'intersection de la tangente à la courbe en l'origine et lorsque la droite devient constante.

On modélise en cliquant sur l'onglet modélisation et on choisit la forme en cliquant sur modélisation graphique. Ici, on choisira exponentielle (penser à ne pas prendre celle qui décroît).



On lit ainsi : v_0 = 0,16 m.s^{-1} et v_1 = 0,94m.s^{-1}.

Pour le temps caractéristique, il suffit de lire la valeur de τ dans l'expression du modèle.

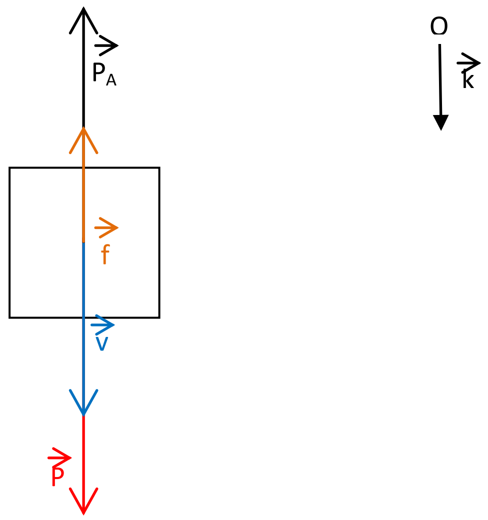
Ici, τ = 0,4s.

Enregistrer le fichier au format *texte avec tabulation*.

2. **Etude théorique du mouvement de chute**

Faire le bilan des forces exercées sur le bouchon ainsi qu'un schéma avec toutes les forces et écrire la deuxième loi de Newton.

- Système : {bouchon}
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen
- Forces : - poids $\vec{P} = m.\vec{g}$
  - Poussée d'Archimède $\vec{P_A} = m_e.\vec{g}$
  - frottements $\vec{f}$
- Schéma



- 2ème loi de Newton

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\overrightarrow{a_G}$$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{P_A} + f = m.\overrightarrow{a_G}}$$

a) **hypothèse 1 : la force de frottement fluide est de la forme f = k.v_G**

Projeter la deuxième loi de Newton sur un axe vertical. En déduire la relation entre $\frac{dv_G}{dt}$ et v_G.

$$\vec{f} = -k.\overrightarrow{v_G} \qquad \overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$$

$$m.\vec{g} - m_e.\vec{g} - k.\overrightarrow{v_G} = m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$$

$$m.g - m_e.g - k.v_G = m\frac{dv_G}{dt}$$

$$g.(m - m_e) - k.v_G = m\frac{dv_G}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv_G}{dt} = g.\left(1 - \frac{m_e}{m}\right) - \frac{k}{m}.v_G}$$

Ceci est l'équation différentielle du mouvement du premier ordre.

Détermination de la valeur k :

$$si\ v = v_{lim} \qquad \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$$

$$g.\left(1 - \frac{m_e}{m}\right) - \frac{k}{m}.v_{lim} = 0$$

$$k = \frac{g.(m - m_e)}{v_{lim}} = \frac{9{,}8.(24{,}5 - 18{,}8).10^{-3}}{0{,}94}$$

$$\approx 5{,}94.10^{-2}\ kg/s$$

=> donc $$\frac{dv_G}{dt} = 9{,}8.\left(1 - \frac{18{,}8}{24{,}5}\right) - \frac{5{,}94.10^{-2}}{24{,}5.10^{-3}}.v_G$$

$$\boxed{\approx 2{,}28 - 2{,}42.v_G}$$

b) <u>hypothèse 2 : la force de frottement fluide est de la forme f = k.v_G^2</u>

Projeter la deuxième loi de Newton sur un axe vertical. En déduire la relation entre $\frac{dv_G}{dt}$ et v_G^2.

$$\vec{f} = -k.\vec{v_G}^2 \qquad \vec{a_G} = \frac{d\vec{v_G}}{dt}$$

$$m.\vec{g} - m_e.\vec{g} - k.\vec{v_G}^2 = m\frac{d\vec{v_G}}{dt}$$

$$m.g - m_e.g - k.v_G^2 = m\frac{dv_G}{dt}$$

$$g.(m - m_e) - k.v_G^2 = m\frac{dv_G}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv_G}{dt} = g.\left(1 - \frac{m_e}{m}\right) - \frac{k}{m}.v_G^2}$$ Ceci est l'équation différentielle du mouvement du second ordre.

Détermination de la valeur k :

$$si\ v = v_{lim} \qquad \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$$

$$g.\left(1 - \frac{m_e}{m}\right) - \frac{k}{m}.v_{lim}^2 = 0$$

$$k = \frac{g.(m - m_e)}{v_{lim}^2} = \frac{9{,}8.(24{,}5 - 18{,}8).10^{-3}}{0{,}94^2}$$

$$\approx 6{,}32.10^{-2}\ kg/m$$

=> donc $$\frac{dv_G}{dt} = 9{,}8.\left(1 - \frac{18{,}8}{24{,}5}\right) - \frac{6{,}32.10^{-2}}{24{,}5.10^{-3}}.v_G$$

$$\boxed{\approx 2{,}28 - 2{,}58.v_G}$$

3. Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

Ouvrir un tableur (open office, excel …). Pour importer les valeurs de Regressi, faire *insertion/Feuille à partir d'un fichier/nom du fichier*, puis *ok* deux fois.

Par la méthode d'Euler calculer les valeurs de $\frac{dv_G}{dt}$ puis de v_G pour les deux hypothèses formulées.

$$pour\ \Delta t\ petit: \qquad \frac{dv_G}{dt}(t_0) = \frac{\Delta v_G}{\Delta t}(t_0) = \frac{v_G(t_1) - v_G(t_0)}{\Delta t}$$

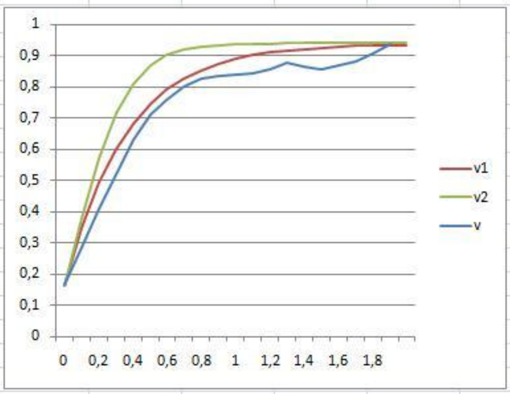
$$v_G(t_1) - v_G(t_0) = \frac{dv_G}{dt}(t_0).\Delta t$$

$$v_G(t_1) = \frac{dv_G}{dt}(t_0).\Delta t + v_G(t_0)$$

Paramètres		
t_0(s)	v_0(m/s)	Δt(s)
0	0,16	0,1

Valeurs expérimentales			
t s	x m	y m	v m.s⁻¹ DIFF(y,t)
0	-0,0274	-0,0274	0,1652686
0,1	-0,0219	-0,00274	0,2867543
0,2	-0,0247	0,0301	0,40824
0,3	-0,0274	0,0767	0,51838
0,4	-0,0274	0,137	0,6301
0,5	-0,0274	0,203	0,7096
0,6	-0,0356	0,282	0,758
0,7	-0,0356	0,359	0,802
0,8	-0,0384	0,438	0,825
0,9	-0,0438	0,526	0,835
1	-0,0493	0,611	0,838
1,1	-0,0493	0,69	0,844
1,2	-0,0575	0,775	0,856
1,3	-0,0575	0,866	0,876
1,4	-0,0603	0,951	0,864
1,5	-0,0657	1,04	0,857
1,6	-0,0657	1,12	0,868
1,7	-0,074	1,21	0,88
1,8	-0,0767	1,3	0,9085714
1,9	-0,0849	1,39	0,9371429

Valeur obtenues par la méthode d'Euler				
t1 s	dv1/dt $m.s^{-2}$	v1 $m.s^{-1}$	dv2/dt $m.s^{-2}$	v2 $m.s^{-1}$
0	1,8928	**0,16**	2,213952	**0,16**
0,1	1,4312496	**0,34928**	1,9047073	**0,3813952**
0,2	1,0834559	**0,492405**	1,436261	**0,5718659**
0,3	0,8201762	**0,6007506**	0,9592236	**0,715492**
0,4	0,6208733	**0,6827682**	0,5813453	**0,8114144**
0,5	0,4700011	**0,7448555**	0,3292225	**0,8695489**
0,6	0,3557909	**0,7918556**	0,1787082	**0,9024712**
0,7	0,2693337	**0,8274347**	0,0946643	**0,920342**
0,8	0,2038856	**0,8543681**	0,0494773	**0,9298084**
0,9	0,1543414	**0,8747566**	0,0256759	**0,9347561**
1	0,1168364	**0,8901908**	0,0132745	**0,9373237**
1,1	0,0884452	**0,9018744**	0,0068496	**0,9386512**
1,2	0,066953	**0,9107189**	0,0035308	**0,9393361**
1,3	0,0506834	**0,9174142**	0,0018191	**0,9396892**
1,4	0,0383674	**0,9224826**	0,000937	**0,9398711**
1,5	0,0290441	**0,9263193**	0,0004825	**0,9399648**
1,6	0,0219864	**0,9292237**	0,0002485	**0,9400131**
1,7	0,0166437	**0,9314224**	0,000128	**0,9400379**
1,8	0,0125993	**0,9330867**	6,589E-05	**0,9400507**
1,9	0,0095376	**0,9343466**	3,393E-05	**0,9400573**
2	0,00722	**0,9353004**	1,747E-05	**0,9400607**



On choisit la courbe la plus proche de celle de la vitesse réelle. Ici c'est la courbe rouge (v1).